

绳 - 船模型的拓展研究

何述平

(西北师范大学教育学院物理教育研究所 甘肃 兰州 730070)

(收稿日期:2016-03-17)

摘要:基于绳 - 船模型拓展性地探究了斜绳上点的速度、加速度,结果表明:斜绳上各点的速度、加速度的大小、方向均不同;深化了绳 - 船模型的运动学认识.

关键词:绳 - 船模型 斜绳上点 速度 加速度 拓展

1 引言

绳 - 船模型是典型的运动学问题:如图 1,岸上一人用绕过定滑轮的不可伸长的轻绳以匀速率 v_0 拉湖面上与绳相连的船靠岸,当绳与水平面成 θ 角时,求船的速度、加速度.从普通物理用直角坐标分量法可简便解决^[1].因绳、船连动,则连接船的斜绳端点的速度、加速度与船的相同;那么,斜绳上点的速度、加速度如何?有怎样的特点?就此进行相应的探究,以期拓展、深化绳 - 船模型的运动学认识,并为教学奠定基础.

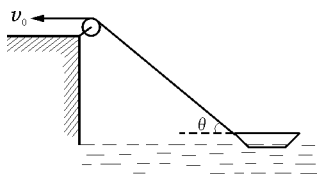


图 1 绳 - 船模型

2 探究

基于绳 - 船模型,依次探究斜绳端点、斜绳上点的速度、加速度.

2.1 斜绳端点的速度 加速度

湖岸为参考系,斜绳与滑轮相切处为原点,建立平面直角坐标系 $O-xy$,如图 2;连接船的斜绳端点 A 为研究对象(视作质点),位置坐标为 (x_A, y_A) ;取 r_A, θ 为参量,则有

$$x_A = r_A \cos \theta \quad (1)$$

$$y_A = r_A \sin \theta \quad (2)$$

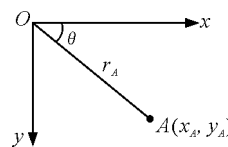


图 2 点 A 的直角坐标

式中 x_A, r_A, θ 均是时间 t 的变量,而由题设知 $y_A = c$ 为恒量(因绳端 A 随船沿湖面水平向左运动);对 t 求导得

$$\frac{dx_A}{dt} = \frac{dr_A}{dt} \cos \theta - \frac{d\theta}{dt} r_A \sin \theta \quad (3)$$

$$0 = \frac{dr_A}{dt} \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} r_A \cos \theta \quad (4)$$

依题意:绳缩短,则有

$$\frac{dr_A}{dt} = -v_0 \quad (5)$$

由式(3)、(4)、(5)得

$$\frac{dx_A}{dt} = -\frac{v_0}{\cos \theta} \quad (6)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0 \tan \theta}{r_A} \quad (7)$$

式(6)、(7)分别是斜绳端点 A 的速度、绕 O 转动的角速度的大小的表达式.综合式(5)、(6)、(7)可知,斜绳端点 A 的速度 $\frac{v_0}{\cos \theta}$ 是沿绳收缩的分速度 v_0 、绕 O 转动的分速度 $\frac{d\theta}{dt} \times r_A = v_0 \tan \theta$ 的合速度.

由式(6)、(7)得端点 A 的加速度^[1]

$$\frac{d^2 x_A}{dt^2} = -\frac{v_0^2 \tan^2 \theta}{r_A \cos \theta} \quad (8)$$

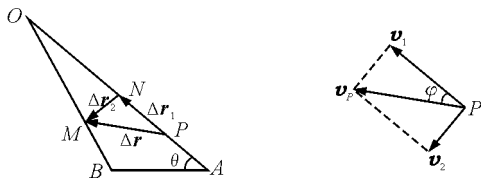
式(6)、(8)中的负号表明:斜绳端点 A 的速度、加速度的方向均沿 x 轴反向.

2.2 斜绳上点的速度 加速度

有定性说明斜绳上各点的速度的大小、方向都不相同,但斜绳上各点的速度在绳上的投影都相同,等于拉绳的速度^[1];而未能依据位移、速度概念细致推证,难免令人费解.鉴于此,先定性推证,再定量探究.

2.2.1 斜绳上点的速度特点

斜绳与滑轮相切处 O 为参考点(惯性系),经时间 Δt ,船沿湖面由 A 点运动到 B 点,斜绳上一点 P 相应由 P 点运动到 M 点,位移矢量为 Δr .取 $ON = OM$,则点 P 的位移矢量三角形为 ΔPNM ,如图 3(a); Δt 足够短或趋于零时,分位移 Δr_2 垂直于分位移 Δr_1 (Δr 可等效为相对于参考点 O 的位置矢量 r [图 3(a) 中未画出]的大小变化即分位移 Δr_1 和方向变化即分位移 Δr_2).因此,点 P 的运动自然是沿绳的分运动、垂直绳的分运动的合运动;即点 P 的速度 v_P 是沿绳的分速度 v_1 ,垂直绳的分速度 v_2 的合速度,如图 3(b);但点 P 的速度方向不再沿水平向左.从而定性推知:斜绳上各点的速度的大小、方向都不相同,但斜绳上各点的速度在绳上的投影都相同,等于拉绳的速度.



(a) 点 P 的位移矢量

(b) 点 P 的速度矢量

图 3

2.2.2 直角坐标系下斜绳上点的速度、加速度

(1) 直角坐标系下斜绳上点的速度

参考系、直角坐标系见图 2,斜绳上一点 P 为研究对象(视作质点),位置坐标为 (x_P, y_P) ,点 P 与斜绳端点 A 共线,则有约束方程

$$x_P = r_P \cos \theta \quad (9)$$

$$y_P = r_P \sin \theta \quad (10)$$

式中 x_P, y_P, r_P, θ 均是时间 t 的变量,求得

$$\frac{dx_P}{dt} = \frac{dr_P}{dt} \cos \theta - \frac{d\theta}{dt} r_P \sin \theta \quad (11)$$

$$\frac{dy_P}{dt} = \frac{dr_P}{dt} \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} r_P \cos \theta \quad (12)$$

式中 P 是斜绳上的点,且绳缩短,则有

$$\frac{dr_P}{dt} = -v_0 \quad (13)$$

由式(11)~(13)和式(7)得

$$\frac{dx_P}{dt} = -v_0 \left(1 + \frac{r_P}{r_A} \tan^2 \theta\right) \cos \theta \quad (14)$$

$$\frac{dy_P}{dt} = -v_0 \left(1 - \frac{r_P}{r_A}\right) \sin \theta \quad (15)$$

即 P 点的速度为

$$v_P = -v_0 \left[\mathbf{i} \left(1 + \frac{r_P}{r_A} \tan^2 \theta\right) \cos \theta + \mathbf{j} \left(1 - \frac{r_P}{r_A}\right) \sin \theta \right] \quad (16)$$

于是有

$$v_P |_{r_P=0} = -v_0 (\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta) \quad (17)$$

$$v_P |_{r_P=r_A} = -\frac{v_0}{\cos \theta} \mathbf{i} \quad (18)$$

式(18)的结果同端点 A 的式(6).由式(16)得 v_P 的大小、与水平面夹角

$$v_P = v_0 \sqrt{1 + \left(\frac{r_P}{r_A} \tan \theta\right)^2} \quad (19)$$

$$\alpha = \theta - \arctan\left(\frac{r_P}{r_A} \tan \theta\right) \quad (20)$$

式(19)、(20)表明: v_P, α 均是 r_P 的函数,即斜绳上各点的速度的大小、方向均不同;进而得(由题设知:

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 \leq r_P \leq r_A)$$

$$\frac{\partial v_P}{\partial r_P} = \frac{v_0 r_P \tan^2 \theta}{r_A^2 \sqrt{1 + \left(\frac{r_P}{r_A} \tan \theta\right)^2}} > 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r_P} = \frac{-\tan \theta}{r_A \left[1 + \left(\frac{r_P}{r_A} \tan \theta\right)^2\right]} < 0 \quad (22)$$

式(21)表明: v_P 随 r_P 的增大而增大;式(22)表明: α 随 r_P 的增大而减小;综合式(17)~(22)得:斜绳上

点的速度的大小范围为 $\left(v_0, \frac{v_0}{\cos \theta}\right)$ 、方向即与水平

面夹角范围为 $(\theta, 0)$ 。

(2) 直角坐标系下斜绳上点的加速度

由式(16)及式(5)、(7)、(13)得 P 点的加速度

$$a_P = \frac{v_0^2 \tan \theta}{r_A} \left\{ \mathbf{i} \left[2 - \frac{r_P}{r_A} (3 + \tan^2 \theta) \right] \sin \theta - \mathbf{j} \left[2 \left(1 - \frac{r_P}{r_A} \right) \cos \theta \right] \right\} \quad (23)$$

于是有

$$a_P |_{r_P=0} = \frac{2v_0^2 \tan \theta}{r_A} (\mathbf{i} \sin \theta - \mathbf{j} \cos \theta) \quad (24)$$

$$a_P |_{r_P=r_A} = -\frac{v_0^2 \tan^2 \theta}{r_A \cos \theta} \mathbf{i} \quad (25)$$

式(25)的结果同端点 A 的式(8)。由式(23)得 a_P 的大小、与水平面夹角正切

$$a_P = \frac{v_0^2 \tan \theta}{r_A} \left[\left(\frac{r_P}{r_A} \right)^2 (4 + 5 \tan^2 \theta + \tan^4 \theta) - \frac{4r_P}{r_A} (2 + \tan^2 \theta) + 4 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

$$\tan \beta = \frac{2 \left(1 - \frac{r_P}{r_A} \right) \cot \theta}{\frac{r_P}{r_A} (3 + \tan^2 \theta) - 2} \quad (27)$$

式(26)、(27)表明： a_P 、 $\tan \beta$ 均是 r_P 的函数，即斜绳上各点的加速度的大小、方向均不同；进而得

$$\frac{\partial a_P}{\partial r_P} = \frac{v_0^2 \tan \theta}{r_A^2} \left[\frac{r_P}{r_A} (4 + 5 \tan^2 \theta + \tan^4 \theta) - 2(2 + \tan^2 \theta) \right] \left[\left(\frac{r_P}{r_A} \right)^2 (4 + 5 \tan^2 \theta + \tan^4 \theta) - \frac{4r_P}{r_A} (2 + \tan^2 \theta) + 4 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \tan \beta}{\partial r_P} = \frac{-2(\tan \theta + \cot \theta)}{r_A \left[\frac{r_P}{r_A} (3 + \tan^2 \theta) - 2 \right]^2} < 0 \quad (29)$$

令式(28)等于零，得

$$r_{Pa} = \frac{2(2 + \tan^2 \theta)r_A}{4 + 5 \tan^2 \theta + \tan^4 \theta} \quad (30)$$

由式(28)、(30)知： $r_P < r_{Pa}$ 时， $\frac{\partial a_P}{\partial r_P} < 0$ ，即 a_P 随 r_P

的增大而减小； $r_P = r_{Pa}$ 时， $\frac{\partial a_P}{\partial r_P} = 0$ ，即 a_P 取极小值

$$\frac{2v_0^2 \sin^2 \theta}{r_A \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}}；r_P > r_{Pa} 时，\frac{\partial a_P}{\partial r_P} > 0，即 a_P 随 r_P 的$$

增大而增大。式(29)表明： $\tan \beta$ 随 r_P 的增大而减小。

由式(26)、(30)得极小值时加速度

$$a_P |_{r_P=r_{Pa}} = -\frac{2v_0^2 \tan^2 \theta}{r_A (4 + \tan^2 \theta) \sec^3 \theta} [\mathbf{i} \cdot 2 + \mathbf{j} (3 + \tan^2 \theta) \tan \theta] \quad (31)$$

2.2.3 极坐标系下斜绳上点的速度、加速度

(1) 极坐标系下斜绳上点的速度

湖岸为参考系，斜绳与滑轮相切处为原点，建立极坐标系， \hat{r} 、 $\hat{\theta}$ 为单位矢量，如图4；斜绳上一点 P 为研究对象（视作质点），位置坐标为 (r_P, θ) ，位置矢量为

$$\mathbf{r}_P = r_P \hat{r} \quad (32)$$

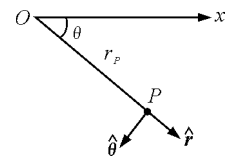


图4 点 P 的极坐标

则 P 点的速度为

$$\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} = \frac{dr_P}{dt} \hat{r} + r_P \frac{d\hat{r}}{dt} \quad (33)$$

由旋转矢量导数^[2]、式(7)得

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \hat{r} = \frac{v_0 \tan \theta}{r_A} \hat{\theta} \quad (34)$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \hat{\theta} = -\frac{v_0 \tan \theta}{r_A} \hat{r} \quad (35)$$

由式(33)、(34)、(35)得

$$\mathbf{v}_P = -v_0 \hat{r} + \frac{v_0 r_P \tan \theta}{r_A} \hat{\theta} \quad (36)$$

式(36)表明： P 点的速度 \mathbf{v}_P 是沿绳收缩的分速度

$\mathbf{v}_1 = -v_0 \hat{r}$ ，垂直绳的分速度 $\mathbf{v}_2 = \frac{v_0 r_P \tan \theta}{r_A} \hat{\theta}$ 的合

速度；进而得： v_P 大小同式(19)，与斜绳夹角 $\varphi =$

$\arctan\left(\frac{r_P}{r_A} \tan \theta\right)$ ，与水平面夹角 $\alpha = \theta - \varphi$ ，同式

(20)。

(2) 极坐标系下斜绳上点的加速度

由式(36)、(34)、(35)、(5)、(7)、(13)得 P 点的加速度

$$\mathbf{a}_P = \frac{v_0^2 \tan \theta}{r_A} \left\{ -\frac{r_P \tan \theta}{r_A} \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{r_P}{r_A} (2 + \tan^2 \theta) - 2 \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \quad (37)$$

于是有

$$\mathbf{a}_P |_{r_P=0} = -\frac{2v_0^2 \tan \theta}{r_A} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (38)$$

$$\mathbf{a}_P |_{r_P=r_A} = \frac{v_0^2 \tan^2 \theta}{r_A} (-\hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \tan \theta) \quad (39)$$

由式(37)得 \mathbf{a}_P 的大小同式(26),与斜绳夹角正切

$$\tan \varphi = \frac{2r_A - r_P(2 + \tan^2 \theta)}{r_P \tan \theta} \quad (40)$$

式(26)、(40)表明: $a_P, \tan \varphi$ 均是 r_P 的函数,即斜绳上各点的加速度的大小、方向均不同;由式(37)、(30)得极小值时加速度

$$\mathbf{a}_P |_{r_P=r_{Pa}} = \frac{-2v_0^2 \sin^2 \theta}{r_A(4 + \tan^2 \theta)} \cdot [\hat{\mathbf{r}}(2 + \tan^2 \theta) + \hat{\boldsymbol{\theta}} \tan \theta] \quad (41)$$

3 讨论

不同坐标系下斜绳上点的速度、加速度的表达式的形式不同[式(16)、(23)和式(36)、(37)];但大小均相同(式(19)、(26)).平面直角坐标系是恒坐标系,即单位矢量 $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ 为恒矢量;而平面极坐标系是动坐标系,即单位矢量 $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ 为动矢量;用平面极坐标系定量探究斜绳上点的速度、加速度无形之中提高了要求——需确定单位矢量的时间导数,并用到

矢量的叉乘[式(34)、(35)].因此,绳-船模型的斜绳上点的速度、加速度的确定,用平面直角坐标较简便;而用平面极坐标虽对矢量运算要求较高,但较简捷、较易理解斜绳上点的速度与拉绳速度的关系[式(36)].

就物理学方法而言,直角坐标参量法涉及导数、矢量表示等方法;极坐标法涉及导数、矢量表示、单位矢量导数、矢量叉乘等方法.

4 结语

基于绳-船模型拓展性地探究了斜绳上点的速度、加速度,给出了定量表达式,并界定了取值;讨论了直角坐标参量法、极坐标法的特点;深化了绳-船模型的运动学认识,为教学奠定了基础.呈现了拓展普通物理运动学基本问题的一个实例.从基本问题到拓展问题,反映了提出问题能力;而提出问题能力的培养是教学目标之一;因此,依据教学实际适度让学生拓展适宜的基本问题,应是培养其提出问题能力的有效教学策略.

参考文献

- 1 胡盘新,孙迺疆.普通物理学(第5版)习题分析与解答.北京:高等教育出版社,2003.9~10
- 2 Kleppner D, Kolenkow R J.力学引论.宁远源,等译.北京:人民教育出版社,1980.33~35,43

Extending Research on Rope-boat Model

He Shuping

(Research Institute of Physics Education, College of Education, Northwest Normal University, Lanzhou, Gansu 730070)

Abstract: Based on the model of rope-boat, the velocity and acceleration of a point of slanting rope are extensively explored, the results show that the size and direction of velocity and acceleration of each point of slanting rope are different; recognizing of kinematics of the model of rope-boat is deepened.

Key words: rope-boat model; point of slanting rope; velocity; acceleration; extending